Unité centrale de la Formation des cadres

Centres régionaux des métiers d'éducation et de formation

(CRMEF)

Programme du concours d'accès

Cycle de préparation au concours d'agrégation

Mathématique

Les épreuves écrites et orales portent sur les notions et résultats indiqués dans les deux sections ci-dessous.

1. Algèbre et géométrie

1.1. Structures algébriques

- Structures algébriques. Groupes, sous-groupes, sous-groupe engendré par une partie, groupe cyclique, morphisme de groupes, ordre d'un groupe, ordre d'un élément, théorème de LAGRANGE.
- Groupe symétrique et groupe alterné : décomposition d'une permutation en produit de transpositions, en produit de cycles à supports disjoints : signature.
- Anneaux et corps, sous-anneaux (au sens des anneaux unitaires), morphisme d'anneaux, caractéristique d'un anneau. Corps, sous-corps, corps premier, corps de fractions d'un anneau intègre. Idéaux, idéaux premiers et idéaux Maximaux. Divisibilité dans les anneaux intègres, éléments associés, éléments irréductibles et éléments premiers, PGCD et PPCM, cas des anneaux principaux : algorithme d'EUCLIDE.
- Congruences dans $\mathbb{Z}$, nombres premiers, anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, théorèmes de BEZOUT et de GAUSS. Corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels, corps $\mathbb{R}$ des nombres réels, corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes, théorème de D'ALEMBERT-GAUSS.

1.2. Arithmétique des polynômes

- Anneaux de polynômes à une indéterminée à coefficients dans un sous anneau A de $\mathbb{C}$. Construction de $A[X]$, algorithme de la division euclidienne. Fonction polynôme, racines et multiplicités, polynôme dérivé, formule de TAYLOR.
- Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$ ($\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$), algorithme d'EUCLIDE, théorème de BEZOUT et de GAUSS, polynômes irréductibles, contenu d'un polynôme, polynôme primitif, critère d'EISENSTEIN. Relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme scindé, sommes de NEWTON. Corps des fractions rationnelles à une indéterminée sur $\mathbb{K}$, décomposition en éléments simples. Définition d'un polynômes à plusieurs indéterminées à coefficients dans $\mathbb{K}$, définition de polynômes symétriques.

1.3. Algèbre linéaire

- Espace vectoriel,produit d'espaces vectoriels. Sous-espaces vectoriels et sous espaces affines, espaces quotients, somme de sous-espaces, somme directe, supplémentaires. Familles libres, génératrices et bases. Applications linéaires, image et noyau, algèbre des endomorphismes d'un espace vectoriel E. Groupe linéaire $GL(E)$.
- Sous-espaces stables d'un endomorphisme, valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres.
- Espaces vectoriels de dimension finie. Existence de bases, isomorphisme avec $\mathbb{K}^n$, existence de supplémentaires d'un sous-espace, rang d'une application linéaire, rang d'un système de vecteurs. Espace dual, rang d'un système d'équations linéaires, base duale.
- Applications multilinéaires. Déterminant d'un système de vecteurs, d'un endomorphisme, groupe spécial linéaire $SL(E)$. Orientation d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

1.4. Calcul matriciel

- Matrices à coefficients dans un sous-corps de $\mathbb{C}$, opérations matricielles, représentations matricielles d'une application linéaire, changement de base. Rang d'une matrice, opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes d'une matrice, méthode du pivot de GAUSS.
- Application à la résolution de systèmes d'équations linéaires, au calcul de déterminants, à l'inversion des matrices carrées, à la détermination du rang d'une matrice, à la détermination d'équations définissant un sous-espace vectoriel.

1.5. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie

- Sous-espaces stables d'un endomorphisme, lemme des noyaux, polynôme d'un endomorphisme ou d'une matrice carrée. Polynôme caractéristique, polynômes annulateurs d'un endomorphisme, polynôme minimal. Théorème de CAYLEY-HAMILTON. Diagonalisation, trigonalisation.
- Géomètrie affine du plan complexe. Isométries du plan affine euclidien, similitudes directes et indirectes du plan, classification des isométries en dimension 2. écriture complexe des similitudes directes et indirectes.

1.6. Algèbre bilinéaire sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel

- Formes bilinéaires, formes bilinéaires alternées, formes bilinéaires symétriques. Formes quadratiques, forme polaire d'une forme quadratique.
- Orthogonalité, éléments orthogonaux, interprétation géométrique, formes non dégénérées, représentation matricielle, changement de base, rang d'une forme bilinéaire. Décomposition d'une forme quadratique en somme de carrés, théorème d'inertie de SYLVESTER.
- Espaces vectoriels euclidiens. Isomorphisme d'un espace vectoriel euclidien avec son dual. Supplémentaire orthogonal, caractérisation de la projection orthogonale. Inégalité de CAUCHY-SCHWARZ, norme euclidienne. Bases orthonormales, procédé d'orthonormalisation de SCHMIDT.
- Groupe orthogonal, groupe spécial orthogonal. Décomposition d'un automorphisme orthogonal en produit de réflexions, endomorphismes symétriques, diagonalisation d'un endomorphisme symétrique, réduction simultanée de deux formes quadratiques réelles l'une étant définie positive. Décomposition polaire dans $GL(n, \mathbb{R})$.
- Espaces vectoriels euclidiens de dimension 2 ou 3, groupe des rotations. Produit mixte, produit vectoriel.
- Angles en dimension 2, angles de vecteurs, angles de droites, théorème de l'angle inscrit, cocyclicité.

2. Analyse et probabilités

2.1. Fonctions de variable réelle

- Topologie de $\mathbb{R}$. Sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$. Droite numérique achevée.
- Fonctions définies sur une partie de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles, limite, continuité à droite et à gauche, continuité, théorème des valeurs intermédiaires. Parties connexes de $\mathbb{R}$, image d'un intervalle par une fonction continue, image continue d'un segment, étude de la continuité des fonctions monotones, continuité d'une fonction réciproque. Fonctions lipschitziennes, fonctions uniformément continues, théorème de HEINE. Fonctions dérivables, dérivée d'une fonction composée, dérivabilité d'une fonction réciproque, théorèmes de ROLLE et des accroissements finis. Application au sens de variation d'une fonction.
- Dérivées d'ordre supérieur, applications de classe C^k et de classe C^k par morceaux, formule de LEIBNIZ, formule de TAYLOR avec reste intégral, formule de TAYLOR-LAGRANGE, formule de TAYLOR-YOUNG, calcul des développements limités et des développements limités généralisés, application à l'étude locale des fonctions.
- Fonctions usuelles polynômes, fonctions rationnelles, fonctions logarithmes, fonctions exponentielles, fonctions puissances, fonctions circulaires et hyperboliques, fonctions circulaires et hyperboliques réciproques. Comparaison locale des fonctions, notations de LANDAU.
- Fonctions convexes d'une variable réelle, continuité et dérivabilité des fonctions convexes, caractérisations de la convexité.

2.2. Suites et séries réelles et complexes

- Suites réelles et complexes, convergence, valeur d'adhérence, suites de CAUCHY, complétude de $\mathbb{R}$ et de C. Théorème de BOLZANO-WEIERSTRASS, parties compactes de $\mathbb{R}$. Critères de convergence d'une suite réelle, comparaison des suites.
- Suites réelles définies par une relation $u_{n+1} = f(u_n)$, étude graphique, points fixes attractifs et points fixes répulsifs.

– Séries réelles et complexes, convergence des séries à termes réels ou complexes, séries géométriques, séries de RIEMANN, séries à termes positifs. Convergence absolue, critères de convergence, estimations des restes. Séries alternées, critère spécial des séries alternées. Produit de deux séries.

2.3. Intégration de fonctions continues par morceaux

– Intégrale sur un segment des fonctions continues par morceaux. Propriétés de l'intégrale, linéarité, relation de CHASLES, positivité, sommes de RIEMANN. Primitives d'une fonction continue, calcul de primitives et d'intégrales : changement de variable, intégration par parties. Méthodes de calcul des primitives usuelles.

– Intégrales généralisées, intégrales absolument convergentes, exemples de RIEMANN, intégrales semi-convergentes. Critères de comparaison, comparaison d'une série et d'une intégrale.

2.4. Suites et séries de fonctions

– Convergence simple, convergence uniforme, continuité, dérivabilité et intégration de la fonction limite. Cas des séries de fonctions, convergence normale, théorèmes d'approximation de WEIERSTRASS polynomial.

– Séries entières. Rayon de convergence, propriétés de la somme d'une série entière sur son disque de convergence, continuité, dérivabilité par rapport à la variable complexe, fonctions analytiques sur un ouvert, principe des zéros isolés. Opérations algébriques sur les fonctions analytiques, composition, exponentielle complexe, propriétés. Extension des fonctions circulaires au domaine complexe, développement en série entière des fonctions usuelles.

– Séries de FOURIER des fonctions continues par morceaux d'une variable réelle. Lemme de RIEMANN-LEBESGUE, théorèmes de DIRICHLET, convergence en moyenne quadratique, formule de PARSEVAL.

2.5. Analyse numérique

– Méthodes de résolution approchée des équations $f(x) = 0$ par dichotomie, méthode de NEWTON, estimation de l'erreur pour la méthode de NEWTON.

– Polynôme d'interpolation de LAGRANGE, méthodes d'intégration des trapèzes et de SIMPSON, estimation de l'erreur, approximation quadratique, polynômes orthogonaux.

2.6. Calcul différentiel

– Topologie de $\mathbb{R}^n$, parties ouvertes et parties fermées, voisinages, parties compactes. Théorème de BOLZANO-WEIERSTRASS, complétude de $\mathbb{R}^n$, parties connexes. Normes usuelles, limites et continuité.

– Fonctions différentiables sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$, différentielle (application linéaire tangente). Dérivée selon un vecteur, dérivées partielles, opérations algébriques sur les applications différentiables, composition d'applications différentiables. Applications de classe C^1, matrice jacobienne, inégalité des accroissements finis. Applications de classe C^k, dérivées partielles d'ordre k. Interversion de l'ordre des dérivations. Formule de TAYLOR avec reste intégral, formule de TAYLOR-YOUNG. Étude locale des applications à valeurs dans $\mathbb{R}$, développements limités, recherche des extremums locaux. Difféomorphismes, théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites.

– Équations différentielles sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$, de la forme $X' = f(t, X)$. Théorème de CAUCHY-LIPSCHITZ, solutions maximales, problème de l'existence globale. Dépendance par rapport aux conditions initiales, trajectoires d'une équation différentielle, comportement qualitatif. Systèmes différentiels linéaires. Méthode de variation de la constante, cas des coefficients constants. Équations différentielles linéaires d'ordre supérieur à un.

2.7. Théorie de la mesure et de l'intégration

– Théorie de la mesure de LEBESGUE. Concept de la mesure, ensembles mesurables, mesure de LEBESGUE, théorèmes sur les ensembles mesurables au sens de LEBESGUE, ensembles de BOREL, caractérisation de la mesurabilité, théorème de CARATHÉODORY.

– Intégrale de LEBESGUE d'une fonction mesurable positive, définition de l'intégrale pour une fonction positive, théorèmes de la convergence monotone, inégalité de TCHEBYSCHEV, lemme de FATOU, théorème de la convergence dominée. Intégrale d'une fonction mesurable quelconque, théorèmes de la convergence (monotone, uniforme, dominée, majorée), lemme de FATOU, relation entre intégrales de LEBESGUE et de RIEMANN. Définition des espaces L^p, inégalités de HÖLDER, de YOUNG, de MINKOWSKI et de SCHWARZ. Calcul d'intégrales doubles et triples : théorème de FUBINI. Intégrale dépendant d'un paramètre, continuité et dérivation.

2.8. Probabilités et statistiques

– Statistique descriptive univariée et bivariée, covariance.

– Probabilités. Espace probabilisé, définition d'un espace probabilisé : événements, tribus, mesure de probabilité. Indépendance d'événements et de tribus, probabilités conditionnelles : définition, formule des probabilités totales et théorème de BAYES.

– Variables aléatoires. Loi d'une variable aléatoire, probabilité discrète, densité de probabilité. Lois classiques, loi discrète et loi absolument continue, fonction de répartition et densité, exemples de variables aléatoires : variable de BERNOULLI, loi binomiale, loi de POISSON, loi normale centrée, loi uniforme, loi exponentielle, loi de GAUSS. Espérance et variance d'une variable aléatoire à valeurs réelles. Théorème de transfert. Indépendance de variables aléatoires. Loi conditionnelle d'une variable par rapport à une autre.

2.9. Analyse fonctionnelle

– Topologie des espaces métriques, topologie induite. Suites, valeurs d'adhérence, limites d'applications et continuité, homéomorphismes. Produit fini d'espaces métriques. compacité, connexité, composantes connexes, connexité par arcs. Propriétés métriques, applications lipschitziennes, applications uniformément continues. Espaces métriques complets, théorème du point fixe pour les applications contractantes.

– Espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, topologie d'un espace vectoriel normé. Normes équivalentes, Cas des espaces de dimension finie. Espaces de BANACH, séries absolument convergentes dans un espace de BANACH. Norme de la convergence uniforme, espace des fonctions continues bornées sur un espace métrique, à valeurs dans un espace de BANACH. Complétude des espaces L^p, où $1 \leqslant p \leqslant \infty$, étude de la compacité de parties d'un espace vectoriel normé, théorème de RIESZ, théorème d'ASCOLI, applications linéaires continues, norme subordonnée.